দ্বিতীয় অধ্যায়

 উৎপাদক ও গুণিতক

 সূচনাঃ সাধারণ অর্থে উৎপাদক বলতে বুঝায় যা কোন কিছু উৎপন্ন করে ; কিন্তু গণিতে উৎপাদক হলো সংখ্যার ধারণা । কোন একটি সংখ্যা a কে অপর একটি সংখ্যা b দ্বারা ভাগ করলে যদি ভাগের কাজ নিঃশেষে সম্পন্ন হয় অর্থাৎ ভাগশেষ না থাকে অর্থাৎ ভাগশেষ শূন্য (০) হয়; তবে b কে a এর উৎপাদক বা গুণনীয়ক বা ভাজক (Factor or Divisor) বলা হয় । বিপরীত ক্রমে, a কে b এর গুণিতক বা ভাজ্য (Multiple) বলা হয় । যেমন, 25 কে 5 দ্বারা ভাগ করলে ভাগের কাজ নিঃশেষে সম্পন্ন হয়; তাই 5 কে 25 এর উৎপাদক বা গুণনীয়ক এবং 25 কে 5 এর গুণিতক বলা হয় । তদ্রুপ, (a3+b3) কে (a+b) দ্বারা ভাগ করলে ও ভাগের কাজ নিঃশেষে সম্পন্ন হয়; তাই (a+b) , (a3+b3) এর একটি উৎপাদক । বিপরীত ক্রমে, (a3+b3) , (a+b) এর একটি গুণিতক ।

 উৎপাদক ও গুণিতকের সংখ্যাঃ যেকোন রাশি বা সংখ্যার উৎপাদক এক (1) এবং ঐ সংখ্যা বা রাশির মধ্যে সীমাবদ্ধ । অপর দিকে, যেকোন সংখ্যা বা রাশির গুণিতক ঐ সংখ্যা বা রাশি থেকে শুরু করে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত । যেমন , 15 এর উৎপাদক হলো 1, 3, 5 ও 15 । এদের প্রত্যেকটি দ্বারা 15 সংখ্যাটি নিঃশেষে বিভাজ্য । অপর দিকে, 15 এর গুণিতক হলো 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, ............. ইত্যাদি (অসীম পর্যন্ত) । এখানে লক্ষণীয় যে , কোন সংখ্যার উৎপাদক বা গুণনীয়ক এক (1) থেকে শুরু করে ঐ সংখ্যার মধ্যে সীমাবদ্ধ কিন্তু কোন সংখ্যার গুণিতক ঐ সংখ্যা থেকে শুরু করে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত ।

 পাটীগণিতীয় সংখ্যার উৎপাদক সংখ্যা নির্ণয়ঃ ইতি পূর্বে আমরা জেনেছি যে, কোন পাটীগণিতীয় সংখ্যা বা বীজগণিতীয় রাশির উৎপাদক সংখ্যা সীমিত । তাহলে প্রশ্ন জাগে, উক্ত পাটীগণিতীয় সংখ্যা বা বীজগণিতীয় রাশির কত গুলি উৎপাদক বা গুণনীয়ক বা ভাজক আছে ? একটি বীজগণিতীয় রাশির নির্দিষ্ট সংখ্যক উৎপাদক থাকলে ও সবসময় তাদের সব গুলিকে নির্ণয় করা সম্ভব হয় না; তবে একটি পাটীগণিতীয় সংখ্যার সব গুলি উৎপাদক নির্ণয় করা সম্ভব হয় । পাটীগণিতের মূল উপপাদ্য অনুসারে আমরা জানি যে, যেকোন পাটীগণিতীয় সংখ্যাকে দুই বা ততোধিক পাটীগণিতীয় মৌলিক সংখ্যার গুণফল আকারে প্রকাশ করা যায় । যেমন, 36 কে লেখা যায় 1×22×32 আকারে অর্থাৎ 22×32 । এখানে 2 ও 3 প্রকৃত মৌলিক উৎপাদক কিন্তু এক (1) প্রকৃত মৌলিক উৎপাদক নয় । এভাবে যেকোন পাটীগণিতীয় সংখ্যা N কে $a^{α}×b^{β}×c^{γ}×………$ আকারে প্রকাশ করা সম্ভব যেখানে a, b, c,........ ইত্যাদি প্রকৃত মৌলিক সংখ্যা এবং $α, β, γ, ………$ ইত্যাদি তাদের সূচক বা মাত্রা (Power) । এরুপ ক্ষেত্রে N এর উৎপাদক বা ভাজক সংখ্যা হবে d= ($α+1)\left(β+1\right)\left(γ+1\right)…….$ টি । যেমন, 72 কে লেখা যায় 23×32 আকারে । সুতরাং 72 এর উৎপাদক সংখ্যা d= (3+1)(2+1) টি অর্থাৎ 12 টি । এগুলি হলো 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 ও 72। এভাবে যেকোন পাটীগণিতীয় কৃত্রিম সংখ্যার উৎপাদক সংখ্যা বা ভাজক সংখ্যা নির্ণয় করা যায় ।

 বীজগণিতীয় রাশির উৎপাদক নির্ণয়ঃ পাটী গণিতীয় সংখ্যার উৎপাদক নির্ণয় করতে শুধু বিশ্লেষণ প্রক্রিয়া ব্যবহৃত হলেও বীজ গণিতীয় রাশির উৎপাদক নির্ণয় করতে বিশ্লেষণ প্রক্রিয়া ছাড়া ও ভাগ প্রক্রিয়া , মধ্যপদ ভাঙ্গন প্রক্রিয়া , শূন্যায়ন প্রক্রিয়া বা উৎপাদক উপপাদ্য প্রক্রিয়া ইত্যাদি ব্যবহার করা হয় । নিচে এ সকল প্রক্রিয়া উপযুক্ত উদাহরণ সহ ব্যাখ্যা করা হলো ।

 সাধারণ বিশ্লেষণ প্রক্রিয়াঃ বিশ্লেষণ প্রক্রিয়া মূলতঃ পাটী গণিতীয় প্রক্রিয়া । সাধারণতঃ সূত্র সম্বলিত বীজ গণিতীয় রাশির উৎপাদক নির্ণয়ে এ প্রক্রিয়া ব্যবহৃত হয় । যেমন ,(a2-b2) এর উৎপাদক সমূহ (a+b) , (a-b) , 1, (a2-b2) ; (a+b)2 এর উৎপাদক সমূহ (a+b) , (a+b) , 1 , (a+b)2 ; (a3+b3) এর উৎপাদক সমূহ (a+b) , (a2—ab+b2) , 1, (a3+b3) ।

 ভাগ প্রক্রিয়াঃ একটি বীজ গণিতীয় রাশির একাধিক উৎপাদক থাকলে তাদের কে একের পর এক ভাগ (কমন নেয়া) প্রক্রিয়ায় বিশ্লেষণ বা পৃথক করা যায় । যেমন , a4-a3+a2-a রাশির উৎপাদকে বিশ্লেষণ প্রক্রিয়া নিম্ন রূপ-

 a4-a3+a2-a

 = a3(a-1) +a(a-1)

 = (a-1)(a3+a)

 = (a-1) a (a2+1)

 = (a-1) .a .(a2+1) . 1

 মধ্যপদ ভাঙ্গন প্রক্রিয়াঃ যদি কোন বীজ গণিতীয় রাশি ap2n + bpnqn+ cq2n আকৃতির হয় , তবে উহাকে মধ্যপদ ভাঙ্গন ( Middle term break up) প্রক্রিয়ায় উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায় । এ ক্ষেত্রে মধ্যপদ bpnqn  কে এমন দুই অংশে ভাগ করা হয় , যাদের বীজ গণিতীয় যোগফল bpnqn  এর সমান হয় এবং বীজ গণিতীয় গুণফল ap2n ও cq2n এর গুণফলের সমান হয় । নিচে উদাহরণের মাধ্যমে বিষয়টি আর ও সহজে ব্যাখ্যা করা হলো ।

 উদাহরণঃ2x2+5xy+3y2 কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো ।

 সমাধানঃ 2x2+5xy+3y2 কে সাধারণ রাশি ap2n + bpnqn+ cq2n এর সাথে তুলনা করে পাই , a = 2, b = 5 , c = 3 , p = x , q = y , n = 1 ; এখন , 2x2+5xy+3y2 এর মধ্যপদ 5xy কে এমন দুই অংশে ভাঙ্গতে হবে যাদের বীজ গণিতীয় যোগফল 5xy এর সমান হবে এবং বীজ গণিতীয় গুণফল 2x2 ও 3y2 এর গুণফলের সমান হবে অর্থাৎ 6x2y2 হবে । এক্ষেত্রে , 5xy কে 2xy+3xy আকারে ভাঙ্গা যায় । এখানে , 2xy ও 3xy এর যোগফল 5xy এবং গুণফল 6x2y2 । এখন ,

 2x2+5xy+3y2 = 2x2+ 2xy + 3xy + 3y2

 = 2x(x+y)+3y(x+y)

 = (x+y)(2x+3y)

 শূন্যায়ন প্রক্রিয়াঃ ইহা ভাগশেষ উপপাদ্য এবং উৎপাদক উপপাদ্য এর মূল প্রক্রিয়া যা Vanishing Method নামে পরিচিত । তাই এখানে ভাগশেষ উপপাদ্য এবং উৎপাদক উপপাদ্য আগে আলোচনা করা হলো ।

 ভাগশেষ উপপাদ্যঃ x চলকের কোন বহুপদী f(x) কে (x-a) আকারের কোন রাশি দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ সর্বদা f(a) হয় । ইহা ভাগশেষ উপপাদ্য (Remainder Theorem) নামে পরিচিত ।

 ধরা যাক , f(x) কে (x-a) দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল হয় p(x) এবং ভাগশেষ হয় R । এখন , ভাজ্য , ভাজক , ভাগফল ও ভাগশেষ এর সম্পর্ক থেকে আমরা জানি ,

 ভাজ্য = (ভাজক $×ভাগফল)+ভাগশেষ $

অর্থাৎ , f(x) = (x-a)×p(x)+R ;

 এখন, উভয় পক্ষে x = a বসিয়ে পাই ,

 f(a) = (a-a)×p(a) +R

 = 0×p(a) +R = 0+R=R

অর্থাৎ , ভাগশেষ R = f(a) ।

নিচে উদাহরণের মাধ্যমে বিষয়টি আর ও সহজে ব্যাখ্যা করা হলো ।

 উদাহরণঃ x3+2x2+5 কে (x+3) দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে ?

 সমাধানঃ এখানে ভাজ্য বহপদী f(x) = x3+2x2+5 , ভাজক ( x-a) = (x+3) অর্থাৎ , a = -3 ;

এখন , f(-3) = (-3)3 +2(-3)2 +5

 = -27 +18 +5

 = -4

সুতরাং x3+2x2+5 কে (x+3) দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে = -4 ।

 শিক্ষার্থীদের x3+2x2+5 কে (x+3) দ্বারা সরাসরি ভাগ করে ভাগশেষ নির্ণয় করে সত্যতা যাচাইয়ের পরামর্শ দেয়া হলো ।

 উৎপাদক উপপাদ্যঃ উৎপাদক উপপাদ্য হলো ভাগশেষ উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য । x চলকের কোন বহুপদী f(x) –তে x = a বসালে যদি f(x) –এর মান শূন্য হয় , অর্থাৎ যদি f(a) = 0 হয় ; তবে (x-a) হবে f(x) বহুপদীর একটি উৎপাদক । ইহা উৎপাদক উপপাদ্য (Factor Theorem) নামে পরিচিত ।

 ধরা যাক ,f(x) কে (x-a) দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল q(x)এবং ভাগশেষ R হয় । এখন, ভাজ্য , ভাজক , ভাগফল ও ভাগশেষ এর সম্পর্ক থেকে আমরা পাই ,

 ভাজ্য = (ভাজক ×ভাগফল)+ভাগশেষ

 অর্থাৎ f(x) = (x-a)q(x)+R

কিন্তু ভাগশেষ উপপাদ্য অনুসারে , R=f(a) এবং শর্তানুসারে , f(a) = 0 , অর্থাৎ R= 0 ; ফলে ,

 f(x) = (x-a)q(x)+0 = (x-a)q(x)

অর্থাৎ (x-a) , f(x) এর একটি উৎপাদক ।

 পাটীগণিতীয় ও বীজগণিতীয় উৎপাদকের মধ্যে পার্থক্যঃ পাটীগণিত ও বীজগণিতে উৎপাদক একই অর্থে ব্যবহৃত হলেও বীজগণিতে উৎপাদকের ব্যবহার ও প্রসার ব্যাপক । ধরা যাক , 12 একটি পাটীগণিতীয় সংখ্যা যার 1, 2, 3, 4, 6 ও 12 এই ছয়টি উৎপাদক রয়েছে । অপর দিকে , a2-b2 একটি বীজগণিতীয় রাশি যার একটি পাটীগণিতীয় উৎপাদক এক (1) এবং তিনটি বীজগণিতীয় উৎপাদক a+b , a-b এবং a2-b2 রয়েছে । সুতরাং যেকোন পাটীগণিতীয় সংখ্যার নির্দিষ্ট সংখ্যক পাটীগণিতীয় উৎপাদক আছে কিন্তু বীজগণিতীয় রাশির পাটীগণিতীয় এবং বীজগণিতীয় উভয় প্রকার উৎপাদক থাকতে পারে ।

 ল. সা. গু. ও গ. সা. গু. : পাটীগণিত এবং বীজগণিত উভয় ক্ষেত্রে ল. সা. গু. ও গ. সা. গু. কথা দুইটি প্রায় সর্বত্র ব্যবহৃত হয় । এ শব্দ যুগলের সাথে আমরা নিচের শ্রেণিতে আগেই পরিচিত হয়েছি । ল. সা. গু. ও গ. সা. গু. কীভাবে নির্ণয় করতে হয় তা ও আমরা শিখেছি । ল. সা. গু. ও গ. সা. গু. নির্ণয়ের ভাগ প্রক্রিয়ার সাথে আমরা ইতিপূর্বে পরিচিত হয়েছি । প্রখ্যাত গণিত বিদ ইউক্লিড যিনি জ্যামিতির জনক নামে পরিচিত ; তিনিই সর্ব প্রথম ভাগ প্রক্রিয়ায় ল. সা. গু. ও গ. সা. গু. নির্ণয় করেন । তাই ভাগ প্রক্রিয়ায় ল. সা. গু. ও গ. সা. গু. নির্ণয় প্রণালী কে ইউক্লিডীয় প্রক্রিয়া ও বলা হয়ে থাকে । এখানে আমরা ল. সা. গু. ও গ. সা. গু. এর পরিপূর্ণ ধারণা সহ উহা নির্ণয় করার একটি সহজ পদ্ধতি আলোচনা করবো । এ পদ্ধতি মনে রাখলে যেকোন পাটীগণিতীয় সংখ্যা দল বা বীজগণিতীয় রাশিমালার ল. সা. গু. ও গ. সা. গু. নির্ণয় না করেও বলে দেয়া সহজ হবে । তাই এ পদ্ধতি মনে রাখার জন্য ছাত্র-ছাত্রীদের পরামর্শ দেয়া হলো ।

 আমরা জানি যে , ল. সা. গু. এর পুরো নাম হলো লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক এবং গ. সা. গু এর পুরো নাম হলো গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক । ইংরেজীতে এদেরকে যথাক্রমে Least Common Multiple বা L.C.M এবং Highest Common Factor বা H.C.F. দ্বারা প্রকাশ করা হয় । এখানে Least বা লঘিষ্ঠ কথার অর্থ হলো ‘সবচেয়ে ছোট’ এবং Highest বা গরিষ্ঠ কথার অর্থ হলো ‘সবচেয়ে বড়’ । আর Common বা সাধারণ কথার অর্থ হলো সকলের মধ্যে আছে এমন । গুণিতক বা Multiple এবং গুণনীয়ক / উৎপাদক বা Factor সম্পর্কে আমরা এ অধ্যায়ের শুরুতেই জেনেছি ।

 সামগ্রিক ভাবে , ‘লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক’ বলতে বুঝায় দুই বা ততোধিক সংখ্যা বা রাশির সাধারণ গুণিতক গুলির মধ্যে যেটি সবচেয়ে ছোট অর্থাৎ লঘিষ্ঠ , সেটিকে এবং ‘গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক’ বলতে বুঝায় দুই বা ততোধিক সংখ্যা বা রাশির সাধারণ গুণনীয়ক বা উৎপাদক গুলির মধ্যে যেটি সবচেয়ে বড় অর্থাৎ গরিষ্ঠ , সেটিকে । নিচে উদাহরণের মাধ্যমে বিষয়টি আর ও সহজে ব্যাখ্যা করা হলো ।

 উদাহরণঃ 12 ও 18 এর ল. সা. গু. ও গ. সা. গু. নির্ণয় করো ।

 সমাধানঃ 12 ও 18 এর ল. সা. গু. নির্ণয়ঃ আমরা জানি , ল. সা. গু. তে গু. এর অর্থ হলো গুণিতক । সুতরাং 12 ও 18 এর গুণিতক সমূহ প্রথমে নির্নয় করি । এখানে-

 12 এর গুণিতক সমূহ 12 , 24 , 36 , 48 ,60 , 72 ,84 , 96 , 108 , 120 , 132 , 144 ,………………………………………..

 18 এর গুণিতক সমূহ 18 , 36 , 54, 72 , 90, 108 , 126 , 144 ,………………………………

 এখন , 12 ও 18 এর সাধারণ গুণিতক সমূহ (যারা উভয়ের গুণিতক) 36 , 72 , 108 , 144 ,………………………………….

এখানে , 12 ও 18 এর সাধারণ গুণিতকদের মধ্যে সবচেয়ে ছোট অর্থাৎ লঘিষ্ঠ হলো 36 । সুতরাং 12 ও 18 এর ‘লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক’ বা ল. সা. গু. হলো 36 ।

 12 ও 18 এর গ. সা. গু. নির্ণয়ঃ আমরা জানি , গ. সা. গু. তে গু. এর অর্থ হলো গুণনীয়ক বা উৎপাদক । সুতরাং 12 ও 18 এর গুণনীয়ক বা উৎপাদক সমূহ প্রথমে নির্ণয় করি । এখানে-

 12 এর গুণনীয়ক সমূহ 1 , 2 , 3, 4 , 6 ও 12 ।

 18 এর গুণনীয়ক সমূহ 1 , 2 , 3 , 6 , 9 ও 18 ।

এখন , 12 ও 18 এর সাধারণ গুণনীয়ক সমূহ (যারা উভয়ের গুণনীয়ক) 1 , 2 , 3 ও 6 ।

এখানে , 12 ও 18 এর সাধারণ গুণনীয়কদের মধ্যে সবচেয়ে বড় অর্থাৎ গরিষ্ঠ হলো 6 । সুতরাং 12 ও 18 এর ‘গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক’ বা গ. সা. গু. হলো 6 ।

 ল. সা. গু. ও গ. সা. গু. এর ধর্মঃ দুইটি সংখ্যার ল. সা. গু. ও গ. সা. গু. এর গুণফল , সর্বদা সংখ্যা দুইটির গুণফলের সমান হয় । ইহা ল. সা. গু. ও গ. সা. গু. এর প্রধান ধর্ম । যেমন , 12 ও 18 সংখ্যা দুইটির ল. সা. গু. ও গ. সা. গু. যথাক্রমে 36 ও 6 । এদের গুণফল 216 । আবার সংখ্যা দুইটির গুণফল ও 216 ( 12×18 = 216) ।

 উৎপাদক ও গুণিতক সম্পর্কে উল্লিখিত ধারণা ছাত্র-ছাত্রীদের জন্য খুবই গুরুত্বপূর্ণ । তাই ধৈর্য্য সহকারে উক্ত ধারণা অর্জন করার জন্য ছাত্র-ছাত্রীদের পরামর্শ দেয়া হলো ।

 অনুশীলনী-২

(১) উৎপাদক ও গুণিতক বলতে কী বুঝায় ? এদের মধ্যে পার্থক্য কী ?

(২) নিচের সংখ্যা গুলির কয়টি করে উৎপাদক (ভাজক) আছে তা নির্ণয় করে দেখাও ।

 60 , 72 , 84 , 144 , 396 , 1440

(3) ভাগশেষ উপপাদ্য টি বর্ণনা ও প্রমাণ করো । x5+7x4+12x3+4x2-12x-12 রাশিটিকে (x+1) ও (x-1) দ্বারা ভাগ করলে প্রতি ক্ষেত্রে কত ভাগশেষ থাকে ?

(৪) উৎপাদক উপপাদ্য টি বর্ণনা ও প্রমাণ করো । দেখাও যে , (x-1) রাশি টি (x3-3x2+3x-1) রাশির একটি উৎপাদক ।

(৫) নিচের রাশি মালার উৎপাদক নির্ণয় করো ।

 (ক) x8+x4y4+y8 (খ) a8-1 (গ) p6-q6

(6) ল. সা. গু. ও গ. সা. গু. কাকে বলে ? দুইটি বীজগণিতীয় রাশির ল. সা. গু. ও গ. সা. গু. যথাক্রমে

x6-y6 ও 1। একটি রাশি x4+x2y2+y4 হলে অপর টি কত ?

 উত্তর মালা-২

(১) নিজে করো , (২) 60 এর 12 টি , 72 এর 12 টি , 84 এর 12 টি , 144 এর 15 টি , 396 এর 18 টি এবং 1440 এর 36 টি ।

(৩) নিজে করো , (৪) নিজে করো , (৫) নিজে করো , (৬) প্রথম অংশ নিজে করো , অপরটি (x2-y2 ) ।